PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU ŚLĄSKIEGO W KATOWICACH NR 2
PRACE MATEMATYCZNE I, 1969

JAN BŁAŻ

O pewnym równaniu różniczkowym z odchylonym argumentem

1. Przedmiotem moich rozważań będzie równanie różniczkowo-funkcjonalne, postaci

$$(1) \qquad \begin{cases} \varphi'(t) = F(t, \{\varphi\}_{t+\delta(t)}) & \text{dla} \quad t \geqslant 0 \\ \varphi(t) = \xi(t) & \text{dla} \quad t \leqslant 0 \end{cases}$$

w którym $\delta(t)$ oznacza funkcję rzeczywistą, nieujemną, ciągłą dla $t \geqslant 0$, $\xi(t)$ jest daną funkcją ciągłą i ograniczoną dla $t \leqslant 0$; symbolem $\{\varphi\}_{t+\delta(t)}$ oznaczamy tu funkcję $\varphi(s) \in \Phi$, (gdzie Φ oznacza zbiór funkcji $\varphi(t)$ ciągłych dla $t \in (-\infty, +\infty)$ o wartościach rzeczywistych i takich, że $\varphi(t) \equiv \xi(t)$ dla $t \leqslant 0$) zlokalizowaną do przedziału $(-\infty, t+\delta(t)\rangle$. Przez $F(t, \{\varphi\}_{t+\delta(t)})$ rozumieć będziemy funkcjonał, określony dla wszelkich par $(t, \varphi) \in \langle 0, +\infty) \times \Phi$. W równaniu (1) dane są: funkcje $\delta(t)$, $\xi(t)$ oraz funkcjonał $F(t, \{\varphi\})$; niewiadomą jest funkcja $\varphi(t)$, która ma być klasy C^1 dla $t \geqslant 0$ i ma spełniać w tym przedziale równanie (1).

Oprócz równania (1) rozpatrywać będziemy równanie kształtu

$$(2) \qquad \begin{cases} \varphi'_M(t) = F(t, \{\varphi_M\}_{t+\delta(t)}) & \text{dla} \quad 0 \leqslant t \leqslant M \\ \varphi_M(t) = \varphi_M(M) & \text{dla} \quad t \geqslant M \\ \varphi_M(t) = \xi(t) & \text{dla} \quad t \leqslant 0 \end{cases}$$

W dalszym ciągu wykażemy twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań tych równań w pewnej klasie Φ^* funkcji i pokażemy, że rozwiązanie $\varphi(t) \in \Phi^*$ równania (1) jest granicą, przy $M \to +\infty$, ciągu rozwiązań $\varphi_M(t) \in \Phi^*$ równań typu (2). W pracy wykorzystuję idee prof. A. BIELECKIEGO, który badał wszechstronnie równania liniowe typów (1) i (2) i któremu dziękuję za udostępnienie mi swych wyników.

Przed sformułowaniem założeń wprowadzimy jeszcze pewne oznaczenia. Przez Φ_0 oznaczać będziemy zbiór funkcji $\varphi(t) \in \Phi$, zlokalizowanych do przedziału $\langle 0, +\infty)$; symbolem $|\varphi|_t^*$ oznaczać będziemy $\sup\limits_{s \leqslant t} |\varphi(s)|$; dla prostoty zapisu w dalszym ciągu zamiast symbolu $F(t, \{\varphi\}_{t+\delta(t)})$ pisać będziemy $F(t, \varphi)$.

2. Odnośnie funkcji, występujących w równaniu (1), przyjmujemy następujący układ założeń.

Założenia (Z).

1° Jeśli $t \geqslant 0$, $\varphi \in \Phi$, to $F(t, \varphi) = \tilde{\varphi}(t) \in \Phi_0$.

2° Jeśli $\varphi \in \Phi$, $\psi \in \Phi$, $\varphi(s) \equiv \psi(s)$ dla $s \leqslant t + \delta(t)$, to $F(t, \varphi) = F(t, \psi)$.

3° Istnieje funkcja $L(t)$, ciągła i nieujemna dla $t \geqslant 0$, taka, że dla każdej pary (t, φ), (t, ψ) iloczynu $\langle 0, +\infty) \times \Phi$ zachodzi nierówność

$$|F(t, \varphi) - F(t, \psi)| \leqslant L(t) \| \varphi - \psi |^{*}_{t+\delta(t)}.$$

4° Istnieje stała k, $k > 1$, taka że dla $t \geqslant 0$ jest

$$|F(t, 0)| \leqslant k L(t).$$

5° Zachodzi nierówność

$$\sup_{0 \leqslant t} \frac{e^{k \int_t^{t+\delta(t)} L(s) ds}}{k} = q < 1. \text{ *)}$$

6° Funkcja początkowa $\xi(t)$ jest ciągła i ograniczona dla $t \leqslant 0$:

$$|\xi(t)| \leqslant \eta \quad \text{dla} \quad t \leqslant 0.$$

7° Stała p spełnia nierówność

$$p \geqslant \frac{\eta + 1}{1 - q}.$$

3. Twierdzenie o istnieniu rozwiązania równania (1).

Oznaczmy przez Φ^* zbiór funkcji $\varphi(t) \in \Phi$, spełniających warunek

$$\|\varphi\| = \sup_{(-\infty, +\infty)} \frac{|\varphi|^{*}_{t}}{e^{k \int_0^{+t} L(s) ds}} \leqslant p = \text{const}, \tag{3}$$

gdzie

$$\int_0^{+t} L(s) ds = \begin{cases} \int_0^t L(s) ds & \text{dla} \quad t \geqslant 0, \\ 0 & \text{dla} \quad t < 0, \end{cases}$$

i rozważmy transformację T, określoną w zbiorze Φ wzorem

$$\tilde{\varphi}(t) = T(\varphi) = \begin{cases} \xi(0) + \int_0^t F(s, \varphi) ds & \text{dla} \quad t \geqslant 0 \\ \xi(t) & \text{dla} \quad t \leqslant 0. \end{cases} \tag{4}$$

Pokażemy, że przy założeniach (Z) zachodzi inkluzja $T(\Phi^*) \subset \Phi^*$ oraz że transformacja T jest zbliżająca.

---

*) Założenie to zaproponował prof. A. Bielecki.

Istotnie, niech $\varphi \in \Phi^*$, wtedy dla $t \leqslant 0$ jest

$$|\tilde{\varphi}(t)| = |\xi(t)| \leqslant \eta,$$

zaś dla $t \geqslant 0$ otrzymujemy oszacowania

$$|\tilde{\varphi}(t)| \leqslant |\xi(0)| + \int_0^t |F(s, \varphi) - F(s, 0)|\, ds + \int_0^t |F(s, 0)|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \eta + \int_0^t L(s)\, |\varphi|^*_{s+\delta(s)}\, ds + k \int_0^t L(s)\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \eta + ||\varphi|| \int_0^t L(s)\, e^{k \int_0^{s+\delta(s)} L(u) du}\, ds + k \int_0^t L(s)\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \eta + ||\varphi|| \sup_{0 \leqslant t} \frac{e^{k \int_t^{t+\delta(t)} L(s) ds}}{k} \int_0^t kL(s)\, e^{k \int_0^s L(u) du}\, ds + e^{k \int_0^t L(s) ds} \leqslant$$

$$\leqslant \eta + ||\varphi||\, q e^{\int_0^t L(s) ds} + e^{k \int_0^t L(s) ds} \leqslant (\eta + ||\varphi||\, q + 1)\, e^{k \int_0^t L(s) ds} \leqslant p e^{k \int_0^t L(s) ds}.$$

Wynika stąd, że $||\tilde{\varphi}|| \leqslant p$, czyli że $T(\Phi^*) \subset \Phi^*$.

Niech teraz $\varphi \in \Phi^*$, $\psi \in \Phi^*$ i niech $\tilde{\varphi} = T(\varphi)$, $\tilde{\psi} = T(\psi)$. Wtedy dla $t \leqslant 0$ jest oczywiście $|\tilde{\varphi}(t) - \tilde{\psi}(t)| \equiv 0$; dla $t \geqslant 0$ mamy zaś oszacowanie

$$|\tilde{\varphi}(t) - \tilde{\psi}(t)| \leqslant \int_0^t |F(s, \varphi) - F(s, \psi)|\, ds \leqslant \int_0^t L(s)\, |\varphi - \psi|^*_{s+\delta(s)}\, ds \leqslant$$

$$\leqslant ||\varphi - \psi|| \sup_{t \geqslant 0} \frac{e^{k \int_t^{t+\delta(t)} L(s) ds}}{k} \int_0^t kL(s)\, e^{\int_0^s L(u) du}\, ds \leqslant q\, ||\varphi - \psi||\, e^{k \int_0^t L(s) ds}.$$

Stąd

$$||\tilde{\varphi} - \tilde{\psi}|| \leqslant q\, ||\varphi - \psi||, \qquad q \in (0, 1).$$

Z powyższych rozważań i z twierdzenia Banacha o punkcie stałym wynika następujące

TWIERDZENIE 1. *Jeżeli spełnione są założenia* (Z), *to równanie* (1) *posiada w klasie* Φ^* *dokładnie jedno rozwiązanie. Rozwiązanie to jest granicą ciągu kolejnych przybliżeń* $\{\varphi_n(t)\}$, *gdzie* $\varphi_n(t) = T(\varphi_{n-1})$, $\varphi_0(t) = \varphi_0 \in \Phi^*$.

4. Twierdzenie o istnieniu rozwiązania równania (2).

Przyjmijmy oznaczenia, wprowadzone w punkcie 1 pracy, z tym, że zamiast zbioru Φ rozważajmy teraz zbiór Φ_M funkcji $\varphi(t) \in \Phi$ i spełniających dodatkowy warunek $\varphi_M(t) = \varphi_M(M)$ dla $t \geqslant M$. Podobnie przez Φ_M^0 rozumieć będziemy zbiór funkcji $\varphi_M(t) \in \Phi_M$, zlokalizowanych do przedziału $\langle 0, +\infty)$. Wreszcie przez Φ_M^* rozumieć będziemy zbiór funkcji $\varphi(t) \in \Phi^*$, spełniających dodatkowy warunek $\varphi_M(t) = \varphi_M(M)$ dla $t \geqslant M$, z normą, określoną związkiem (3).

Rozważamy transformację T_M, określoną na zbiorze Φ_M wzorem

$$(5) \qquad \bar{\varphi}_M(t) = T_M(\varphi_M) = \begin{cases} \xi(0) + \int_0^t F(s, \varphi_M)\, ds & \text{dla} \quad 0 \leqslant t \leqslant M \\ \xi(0) + \int_0^M F(s, \varphi_M)\, ds & \text{dla} \quad t \geqslant M \\ \xi(t) & \text{dla} \quad t \leqslant 0. \end{cases}$$

Podobnie jak poprzednio dowodzi się następującego twierdzenia:

TWIERDZENIE 2. *Jeżeli są spełnione założenia* (Z), *to w klasie* Φ_M^* *istnieje dokładnie jedno rozwiązanie równania* (2). *Rozwiązanie to jest granicą przy* $\nu \to \infty$ *ciągu kolejnych przybliżeń* $\{\varphi_M^\nu(t)\}$, *gdzie*

$$\varphi_M^\nu(t) = T_M(\varphi_M^{\nu-1}), \qquad \varphi_M^0(t) = \varphi_M^0 \in \Phi_M^*.$$

5. Rozwiązanie równania (1) jako granica ciągu rozwiązań równań postaci (2).

Niech $\{M_i\}$ oznacza rosnący ciąg liczb dodatnich, taki że $\lim\limits_{i \to \infty} M_i = +\infty$ i niech $\varphi_{M_i}(t)$ oznacza jedyne rozwiązanie równania

$$(6) \qquad \begin{cases} \varphi'_{M_i}(t) = F(t, \varphi_{M_i}) & \text{dla} \quad 0 \leqslant t \leqslant M_i \\ \varphi_{M_i}(t) = \varphi_{M_i}(M_i) & \text{dla} \quad t \geqslant M_i \\ \varphi_{M_i}(t) = \xi(t) & \text{dla} \quad t \leqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

W dalszym ciągu, dla prostoty oznaczeń, będziemy pisać $\varphi_{M_i}(t) = \psi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$

Niech $\{\psi_{i(j)}(t)\}$ oznacza dowolny podciąg ciągu $\{\psi_i(t)\}$, $j = 1, 2, \ldots$ Pokażemy, że ciąg $\{\psi_{i(j)}(t)\}$ jest wspólnie ograniczony i jednakowo ciągły w każdym przedziale domkniętym $\langle 0, b \rangle$, $0 < b < +\infty$; (dla $t \leqslant 0$ jest to oczywiste).

Rozważmy w tym celu ciąg $\{\psi_{i(j)}^\nu(t)\}$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, kolejnych przybliżeń rozwiązania $\psi_{i(j)}(t)$ równania (6), określony wzorami

$$(7) \qquad \psi_{i(j)}^0(t) = \begin{cases} \xi(t), & t \leqslant 0 \\ \xi(0), & t \geqslant 0, \end{cases}$$

$$\psi_{i(j)}^{\nu+1}(t) = T_{M_{i(j)}}(\psi_{i(j)}^\nu) = \begin{cases} \xi(0) + \int_0^t F(s, \psi_{i(j)}^\nu)\, ds, & 0 \leqslant t \leqslant M_{i(j)} \\ \xi(0) + \int_0^{M_{i(j)}} F(s, \psi_{i(j)}^\nu)\, ds, & t \geqslant M_{i(j)} \\ \xi(t), & t \leqslant 0. \end{cases}$$

Wykażemy wpierw indukcyjnie, że dla $t \in (-\infty, +\infty)$ zachodzi nierówność

$$(8) \qquad |\psi_{i(j)}^\nu(t)| \leqslant p e^{k \int_0^{+t} L(s)\, ds}, \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

Jest to oczywiste dla $t\leqslant 0$; przyjmijmy więc, że $t\in\langle 0,+\infty)$. Wtedy

$$|\psi^0_{i(j)}(t)| = |\xi(0)|\leqslant\eta\leqslant p\leqslant pe^{k\int\limits_0^t L(s)ds}$$

Załóżmy, że dla $t\geqslant 0$ zachodzi nierówność (8); wtedy zgodnie z (7) otrzymamy

$$|\psi^{\nu+1}_{i(j)}(t)|\leqslant|\xi(0)|+\int\limits_0^t |F(s,\psi^{\nu}_{i(j)})-F(s,0)|\,ds+\int\limits_0^t |F(s,0)|\,ds\leqslant$$

$$\leqslant\eta+\int\limits_0^t L(s)\,|\psi^{\nu}_{i(j)}|^{*}_{s+\delta(s)}\,ds+k\int\limits_0^t L(s)\,ds\leqslant$$

$$\leqslant\eta+\int\limits_0^t L(s)\,pe^{k\int\limits_0^{s+\delta(s)} L(u)du}\,ds+k\int\limits_0^t L(s)\,ds\leqslant$$

$$\leqslant\eta+\sup_{t\geqslant 0}\frac{e^{k\int\limits_t^{t+\delta(t)} L(s)ds}}{k}\,p\int\limits_0^t kL(s)\,e^{k\int\limits_0^s L(u)du}\,ds+e^{k\int\limits_0^t L(s)ds}\leqslant$$

$$\leqslant\eta+qpe^{k\int\limits_0^t L(s)ds}+e^{k\int\limits_0^t L(s)ds}\leqslant(\eta+qp+1)\,e^{k\int\limits_0^t L(s)ds}\leqslant pe^{k\int\limits_0^t L(s)ds},$$

gdyż zgodnie z założeniem 7° (Z) zachodzi nierówność $p\geqslant\dfrac{\eta+1}{1-q}$.

Przechodząc w nierówności (8) do granicy przy $\nu\to+\infty$, otrzymujemy nierówność

$$|\psi_{i(j)}(t)|\leqslant pe^{k\int\limits_0^{t+h} L(s)ds}, \tag{9}$$

z której wynika wspólna ograniczoność funkcji $\psi_{i(j)}(t), j=1,2,\ldots$ w przedziale $\langle 0,b\rangle$.

Dla wykazania jednakowej ciągłości funkcji $\psi_{i(j)}(t)$ w przedziale $\langle 0,b\rangle$ przyjmijmy, że liczby t oraz $t+h$ należą do przedziału $\langle 0,b\rangle$ (jednakowa ciągłość funkcji $\psi_{i(j)}(t)$ dla $t\leqslant 0$ jest oczywista). Wtedy

$$|\psi_{i(j)}(t+h)-\psi_{i(j)}(t)|\leqslant\Big|\int\limits_t^{t+h}|F(s,\psi_{i(j)})|\,ds\Big|\leqslant\Big|\int\limits_t^{t+h}|F(s,\psi_{i(j)})-F(s,0)|\,ds\Big|+$$

$$+\Big|\int\limits_t^{t+h}|F(s,0)|\,ds\Big|\leqslant\Big|\int\limits_t^{t+h}L(s)\,|\psi_{i(j)}|^{*}_{s+\delta(s)}\,ds\Big|+k\int\limits_t^{t+h}L(s)\,ds\leqslant\Lambda(b)\,|h|,$$

gdzie $\Lambda(b)$ jest pewną niemalejącą funkcją zmiennej b.

Na mocy twierdzenia Arzeli dla przedziałów prawostronnie otwartych, z ciągu $\{\psi_{i(j)}(t)\}$ można wybrać podciąg $\{\psi_{i(j(k))}(t)\}$, $k=1,2,\ldots$, niemal jednostajnie zbieżny do pewnej funkcji $\psi^*(t)$:

$$\psi^*(t)=\lim_{k\to\infty}\psi_{i(j(k))}(t)\quad(\text{niemal jednostajnie dla } t\in(-\infty,+\infty)),$$

przy czym $\psi^*(t)\equiv\xi(t)$ dla $t\leqslant 0$.

Pokażemy, że funkcja $\psi^*(t)$ spełnia równanie (1); niech $t \in \langle 0, T\rangle$, gdzie T jest dowolnie dużą liczbą dodatnią.

Wtedy

$$\Delta = |\psi^*(t) - \xi(0) - \int_0^t F(s, \psi^*)\, ds| \leqslant |\psi^*(t) - \psi_{i(j(k))}(t)| +$$

$$+ \int_0^t |F(s, \psi^*) - F(s, \psi_{i(j(k))})|\, ds \leqslant |\psi^*(t) - \psi_{i(j(k))}(t)| + \int_0^t L(s)\, |\psi^* - \psi_{i(j(k))}|^*_{s+\delta(s)}\, ds \leqslant$$

$$\leqslant |\psi^*(t) - \psi_{i(j(k))}(t)| + L \int_0^t |\psi^* - \psi_{i(j(k))}|^*_{s+\delta(s)}\, ds,$$

gdzie L jest stałą dodatnią, spełniającą dla $t \in \langle 0, T\rangle$ nierówność $L(t) \leqslant L$. Ponieważ ciąg $\{\psi_{i(j(k))}(t)\}$ jest jednostajnie zbieżny w przedziale $\langle 0, T^*\rangle$, gdzie $T^* = \max\limits_{t \in \langle 0, T\rangle} (t + \delta(t))$, do funkcji $\psi^*(t)$, więc dla dostatecznie dużych k będzie

$$\Delta < \varepsilon + \varepsilon LT = \varepsilon(1 + LT),$$

przy czym ε jest dowolnie małą liczbą dodatnią.

Ponieważ ponadto stała T była dowolna, więc $\Delta = 0$ w całym przedziale $(-\infty, +\infty)$.

Zatem

$$\psi^*(t) = \begin{cases} \xi(0) + \int_0^t F(s, \psi^*)\, ds & \text{dla} \quad t \geqslant 0, \\ \xi(t) & \text{dla} \quad t \leqslant 0, \end{cases} \tag{10}$$

co oznacza, że funkcja $\psi^*(t)$ jest rozwiązaniem równania (1).

Z nierówności (9) wynika, że $\psi^*(t)$ jest elementem zbioru Φ^*. Ponieważ, zgodnie z twierdzeniem 1, funkcja $\varphi(t)$ była jedynym, w klasie Φ^*, rozwiązaniem tego równania, zatem

$$\psi^*(t) \equiv \varphi(t). \tag{11}$$

Pokazaliśmy więc, że z każdego podciągu ciągu $\{\psi_i(t)\}$ można wybrać podciąg, zbieżny zawsze do tej samej funkcji $\varphi(t)$, $t \in (-\infty, +\infty)$. Zatem również ciąg $\{\psi_i(t)\}$ jest niemal jednostajnie zbieżny w przedziale $(-\infty, +\infty)$ do funkcji $\varphi(t)$:

$$\lim_{i \to \infty} \psi_i(t) = \varphi(t), \qquad t \in (-\infty, +\infty). \tag{12}$$

Tym samym udowodniliśmy następujące

TWIERDZENIE 3. *Jeżeli są spełnione założenia* (Z), *to rozwiązanie* $\varphi(t)$ *równania* (1) *jest granicą niemal jednostajnie zbieżnego ciągu* $\{\varphi_{M_i}(t)\}$ *rozwiązań równań* (6).

6. Uwagi końcowe.

Wzmocnijmy założenia (Z), dotyczące funkcjonału $F(t, \varphi)$, przyjmując następujące

Założenia (H).

1° Spełnione są założenia (Z).

2° Funkcjonał $F(t, \varphi)$ jest niemalejący względem zmiennej φ, to znaczy, jeśli $u(s) \leqslant v(s)$ dla $s \leqslant t+\delta(t)$, to

$$F(t, u) \leqslant F(t, v).$$

3° Zachodzi nierówność $F(t, \xi^*) \geqslant 0$ dla $t \geqslant 0$, gdzie

$$\xi^*(t) = \begin{cases} \xi(t) & \text{dla} \quad t \leqslant 0 \\ \xi(0) & \text{dla} \quad t \geqslant 0. \end{cases}$$

Wtedy ma miejsce następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 4. *Jeśli są spełnione założenia* (H), *to rozwiązanie* $\varphi_M(t)$ *równania* (2) *ma następujące własności*

α) $\varphi_M(t)$ *nie maleje względem zmiennej* t, $t \geqslant 0$;

β) $\varphi_M(t)$ *nie maleje względem zmiennej* M, *tzn. jeśli* $0 < M \leqslant N$, *to* $\varphi_M(t) \leqslant \varphi_N(t)$, $t \geqslant 0$.

Dowód. Niech $\{\varphi_M^\nu(t)\}$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, będzie ciągiem kolejnych przybliżeń rozwiązania $\varphi_M(t)$ równania (2), tzn.

$$\varphi_M^0(t) = \begin{cases} \xi(t) & \text{dla} \quad t \leqslant 0 \\ \xi(0) & \text{dla} \quad t \geqslant 0, \end{cases}$$

$$\varphi_M^{\nu+1}(t) = \begin{cases} \xi(0) + \int\limits_0^t F(s, \varphi_M^\nu)\, ds & \text{dla} \quad 0 \leqslant t \leqslant M \\ \xi(0) + \int\limits_0^M F(s, \varphi_M^\nu)\, ds & \text{dla} \quad t \geqslant M \\ \xi(t) & \text{dla} \quad t \leqslant 0. \end{cases}$$

Korzystając z założeń 2° i 3° (H) łatwo dowieść indukcyjnie, że ciąg $\{\varphi_M^\nu(t)\}$ jest niemalejący względem ν, przy każdym ustalonym t.

Stąd i z równości $\varphi_M(t) = \xi^*(t)$ wnosimy, że

$$\lim_{\nu \to \infty} \varphi_M^\nu(t) = \varphi_M(t) \geqslant \xi^*(t).$$

Zatem, wobec założeń 2° i 3° (H), mamy

$$\varphi'(t) = F(t, \varphi_M) \geqslant F(t, \xi^*) \geqslant 0, \quad \text{dla} \quad t \geqslant 0, \tag{13}$$

skąd wynika własność α).

Dla wykazania własności β) zauważmy wpierw, iż jeśli $\bar{\varphi}_M \in \Phi_M^*$, $\bar{\varphi}_N \in \Phi_N^*$, $\bar{\varphi}_M(t) \leqslant \bar{\varphi}_N(t)$ dla $t \geqslant 0$, $F(t, \bar{\varphi}_M) \geqslant 0$, przy czym $0 < M \leqslant N$ i jeśli $\bar{\bar{\varphi}}_M(t) = T_M(\bar{\varphi}_M)$, $\bar{\bar{\varphi}}_N(t) = T_N(\bar{\varphi}_N)$, gdzie transformacja $T_M(\bar{\varphi}_M)$ jest określona wzorem (5) (analogicznie określamy transformację $T_N(\bar{\varphi}_N)$), to dla $t \in (-\infty, +\infty)$ zachodzi nierówność

$$\bar{\bar{\varphi}}_M(t) \leqslant \bar{\bar{\varphi}}_N(t). \tag{14}$$

Istotnie, dla $t \leqslant 0$, jest $\bar{\bar{\varphi}}_M(t) \equiv \bar{\bar{\varphi}}_N(t) \equiv \xi(t)$; niech $0 \leqslant t \leqslant M$ — wtedy, na mocy założenia 2° (H), będzie

$$\bar{\bar{\varphi}}_N(t) - \bar{\bar{\varphi}}_M(t) = \int\limits_0^t \{F(s, \bar{\varphi}_N) - F(s, \bar{\varphi}_M)\}\, ds \geqslant 0.$$

Niech teraz $M \leqslant t \leqslant N$; wtedy

$$\bar{\bar{\varphi}}_N(t) - \bar{\bar{\varphi}}_M(t) = \int_0^t F(s, \bar{\varphi}_N)\, ds - \int_0^M F(s, \bar{\varphi}_M)\, ds \geqslant \int_0^t F(s, \bar{\varphi}_N)\, ds - \int_0^t F(s, \bar{\varphi}_M)\, ds =$$

$$= \int_0^t \{F(s, \bar{\varphi}_N) - F(s, \bar{\varphi}_M)\}\, ds \geqslant 0.$$

Wreszcie dla $t \geqslant N$ będzie

$$\bar{\bar{\varphi}}_N(t) - \bar{\bar{\varphi}}_M(t) = \int_0^N F(s, \bar{\varphi}_N)\, ds - \int_0^M F(s, \bar{\varphi}_M)\, ds \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^N \{F(s, \bar{\varphi}_N) - F(s, \bar{\varphi}_M)\}\, ds \geqslant 0,$$

co kończy dowód nierówności (14).

Niech teraz $\varphi_N(t)$ i $\varphi_M(t)$ oznaczają rozwiązania odpowiednich równań (2) (typu (M) i (N)), gdzie $M \leqslant N$ i niech $\{\varphi_N^\nu(t)\}$ i $\{\varphi_M^\nu(t)\}$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, będą odpowiednimi ciągami kolejnych przybliżeń tych rozwiązań.

Ponieważ $\varphi_M^0(t) \leqslant \xi^*(t) \leqslant \varphi_N^0(t)$, więc wobec nierówności (14) dla $t \in (-\infty, +\infty)$ otrzymujemy nierówność

$$\varphi_M^1(t) = T_M(\varphi_M^0) \leqslant T_N(\varphi_N^0) = \varphi_N^1(t).$$

Indukcyjnie dowodzi się, że

$$\varphi_M^\nu(t) \leqslant \varphi_N^\nu(t), \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots, \qquad t \in (-\infty, +\infty). \tag{15}$$

Przechodząc w nierówności (15) do granicy, przy $\nu \to \infty$, otrzymujemy nierówność $\varphi_M(t) \leqslant \varphi_N(t)$, sformułowaną w obrębie własności β). Tym samym dowód twierdzenia 4 został zakończony.

Równania liniowe, postaci

$$\varphi'(t) = \varphi(t+h), \quad t \geqslant 0, \quad \varphi(0) = 1, \quad 0 < h = \text{const}, \tag{16}$$

oraz

$$\varphi'_M(t) = \varphi_M(t+h), \; 0 \leqslant t \leqslant M, \; \varphi_M(t) = \varphi_M(M) \quad \text{dla} \quad t \geqslant M, \; \varphi_M(0) = 1, \tag{17}$$

badał wszechstronnie prof. A. Bielecki, który był łaskaw udostępnić mi swe wyniki. Wyniki Jego uzyskamy tu z twierdzeń 1—4, przyjmując w szczególności

$$\delta(t) = h, \qquad F(t, \{\varphi\}_{t+\delta(t)}) = \{\varphi\}_{t+h}, \qquad \xi^*(t) = 1.$$

W rozważanym przypadku będą bowiem spełnione założenia (Z) i (H), jeśli przyjąć za prof. A. Bieleckim, iż

$$h < \frac{1}{e}, \qquad k = -\frac{\ln h}{h}, \qquad \|\varphi\| = \sup_{\langle 0, \infty)} \frac{|\varphi(t)|}{e^{kt}}.$$

JAN BŁAŻ

ÜBER EINE DIFFERENTIALGLEICHUNG MIT VERCHIEBENEM ARGUMENT

Zusammenfassung

In der vorliegenden Note beweisen wir einen Existenzsatz und einen Satz über die Eindeutigkeit der Lösungen der Differentialgleichungen (1) und (2), in welchen $\delta(t)$ eine reelle, nichtnegative und im Intervall $\langle 0, +\infty)$ stetige Funktion bezeichnet und $\xi(t)$ — eine gegebene, stetige und im Intervall $(-\infty, 0\rangle$ beschränkte Funktion ist.

Das Symbol $\{\varphi\}_{t+\delta(t)}$ bezeichnet eine stetige Funktion $\varphi(s)$, die im Intervall $s \in (-\infty, t+\delta(t)\rangle$ definiert ist und im Intervall $(-\infty, 0\rangle$ die Identität $\varphi(s) \equiv \xi(s)$ erfüllt.

Wir bezeichnen mit Φ die Menge der reellen und für $t \in (-\infty, +\infty)$ stetigen Funktionen $\varphi(t)$, so daß $\varphi(t) \equiv \xi(t)$ für $t \leqslant 0$ gilt, und mit $F(t, \{\varphi\}_{t+\delta(t)})$ ein für alle Paaren $(t, \varphi) \in \langle 0, +\infty) \times \Phi$ definiertes Funktional.

In der Gleichungen (1) und (2) sind die Funktionen $\delta(t)$, $\xi(t)$ und der Funktional $F(t, \delta)$ gegeben; wir suchen die Funktion $\varphi(t)$. Unter entsprechenden Voraussetzungen beweisen wir, daß es in der Klasse Φ^* (der Funktionen $\varphi(t)$, welche die Bedingung (3) erfüllen) genau eine Integralkurve der Differentialgleichung (1) gibt (Satz 1).

Der Satz 2 betrifft der Existenz und der Eindeutigkeit der Lösungen der Differentialgleichung (2).

Außerdem beweisen wir (Satz 3), daß die Funktionenfolge $\{\varphi_{M_i}(t)\}$ (der Lösungen der Differentialgleichungen (6)) zur Lösung $\varphi(t)$ der Differentialgleichung (1) gleichmäßig im Intervall $(-\infty, +\infty)$ konvergiert.

Oddano do Redakcji 1 sierpnia 1969 r.